https://doi.org/10.51803/yssr.819775

Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlerin İncelenmesi ve Kompleksite Bilimi

Examination of Nonlinear Dynamic Systems and Complexity Science

Hasan TATLIPINAR [a]

Araştırma Makalesi/Research Article
Başvuru/Received: 02.11.2020; Kabul/Accepted: 29.12.2020

ÖZ

Doğrusal olmayan dinamik sistemler ile ilgili çalışmalar günümüzde bilimsel çalışmaların merkezinde yer almaktadır. Fizik bilimi, biyo-sistemler, yeni teknolojiler ve iktisat gibi birçok bilim disiplini doğrusal olmayan dinamik sistemlerin davranışlarına göre modeller oluşturmakta ve bu konularda çalışmalar yapmaktadırlar. Bu nedenle bu yazıda iyi bilinen birkaç doğrusal olmayan dinamik sistem örnek verilerek bu sistemlerin nasıl incelendiği üzerinde durulacaktır. Bunun yanında fiziksel sistemlerin davranışı veya bilgi teorisinde önemli bir yere sahip olan çeşitli entropi tanımları tartışılacaktır. Ayrıca doğrusal olmayan sistemlerle doğrudan ilgili olan kompleksite biliminin genel kavramları üzerinde de kısaca durulacaktır.

Anahtar kelimeler: doğrusal olmayan bilim, kaos, entropi, kompleksite bilimi

ABSTRACT

Studies on the nonlinear dynamic systems are at the center of scientific studies today. Many scientific disciplines such as physics, bio-systems, new technologies and economics create models according to the behavior of nonlinear dynamical systems and work on these subjects. Therefore, this article will focus on how these systems are studied by giving well-known a few examples of nonlinear dynamical systems. Also, the various definitions of entropy, which has an important place in the behavior of physical systems or information theory, will be discussed. In addition, general concepts of the complexity science that are directly related to nonlinear systems will be briefly emphasized.

Keywords: nonlinear science, chaos, entropy, complexity science

[a] Yıldız Teknik Üniversitesi, Fizik Bölümü, htatli@yildiz.edu.tr, **ORCID:** 0000-0002-9728-8519

1. Giriş

Fizik bilimi geniş anlamı ile evreni her yönü ile inceleyen en eski bilimdir. Kompleksite ise yine yaşadığımız evrendeki oluşumların, değişimlerin, olguların yanı sıra bugün biyolojiden ekonomiye kadar birçok bilimdeki oluşum ve davranışların anlaşılması için oluşmuş yeni bir bilimdir. Bu incelemede fizik bilimi ile kompleksite bilimi arasındaki ilişki üzerine durulacaktır. Fizik biliminin oluşumu neredeyse insanlık tarihi kadar eskidir bu nedenle günümüze kadar fizik biliminin gelişiminin oldukça geniş ve iyi bilinen bir tarihi vardır. Kompleksite biliminin ise ancak birkaç on yıllık bir tarihi vardır. Kompleksite sözcük anlamı ile anlaşılması zor, çözümlemesi kolay olmayan olay ve olguları açıklamak için kullanılan karmaşık sözcüğü gibi anlaşılabilir, fakat kompleksite bilimi derken daha ileride açıklanacağı gibi belli bir hiyerarşik yapıya (sistem yapısına) ve ölçekleme gibi birtakım matematiksel kurallara sahip bir bilim disiplini anlaşılmalıdır (Badii & Politi, 1997; Eren & Şahin, 2017). Daha genel olarak kompleksite bilimi kompleks davranış gösteren sistemleri inceleyen bilimdir. Burada sistem çok geniş anlamı ile anlaşılmalıdır. Sistem nesnelerin, biyo-yapıların, canlıların veya sosyal toplulukların oluşturduğu sistem olarak düşünülmelidir. Bu anlamda sistem etrafımızda gözlemlediğimiz her şey olarak düşünülebilir. Bir sistemin davranışı, basit veya karmaşık olabilir. Eğer göz önüne aldığımız sistemin davranışı karmaşık ise bu sistemi analiz etmek için kullandığımız kavramlar bütünlüğü Komleksite bilimini oluşturur. Kompleksite bilimi matematik, fizik, kimya, biyoloji gibi temel bilim alanları yanı sıra günümüzde sosyoloji ve ekonomi gibi bilimleri de kapsamaktadır. Fizik biliminde doğrusal olamayan dinamik sistemlerin davranışını anlamak için kullanılan yöntemler kompleksite biliminin de anlaşılmasında kolaylık sağlayacaktır. Bu nedenle fizik biliminin gelişimi ve yapısını anlatan kısa bir çerçeve çizmek gerekir.

Çevremizde gördüğümüz her şey bir değişim içindedir bu anlamda her şeyin bir dinamiği vardır. Bu değişimin nedenlerini, nasıl olacağını araştırmak ve yanıtlar vermek fizik biliminin ana konularından biridir. Fizik bilimi insanlık tarihi boyunca çok basit bir şekliyle Antik Dönem, Klasik Dönem (Orta Çağ ve Aydınlanma Dönemi), Modern Dönem ve Günümüz gibi sınıflandırılabilir. Bu her dönem için keskin tarihsel sınırlar olmamasına rağmen bütün Dünyaya yayılmış ve genel kabul gören bir takım bilim anlayışları bakımından birbirlerinden ayrılırlar. Antik dönemde doğa olayları veya birtakım sistemlerin davranışı kabaca dört element teorisi ile açıklanıyordu ve bu görüş uzun bir süre bilimsel bir çerçeve olarak görev yaptı. Antik dönemden sonraki Orta Çağ döneminde Dünya'nın birçok bölgesinde Antik döneme ait bilim çerçevesi sorgulandı deneylerle test edildi ve bu çerçevenin yeterli olmadığı ortaya kondu, ardından gelen Klasik dönemde ise günümüzde yaygın olarak egemen olan bilim çerçevesinin kavramları oluştu. Çoğunlukla Aydınlanma dönemi olarak da adlandırılan bu dönem Matematik ve Fizikte yeni kavramlar çerçevesinin oluştuğu bir dönemdir. Bu dönemin başlangıcındaki bazı bilim adamları Galileo, Newton, Descartes, Pascal , Euler, Lagrange olarak sayılabilir. Bu dönemde çevremizde doğa olayları ve birçok sistemin davranışı Klasik Mekanik olarak adlandırılan bir bilim çerçevesi ile açıklandı. Klasik mekanik yasaları basitçe eylemsizlik ilkesi, dinamiğin temel yasası ve etki tepki yasası olarak özetlenebilir. Buna göre evrendeki nesneler klasik mekanik yasalarına göre hareket ederler ve bu yasalar genellikle doğrusal (lineer) denklemlerle ifade edilirler. Bu lineer denklemler belli başlangıç koşullarına göre çözüldüğünde sistemin herhangi bir andaki davranışını verirler. Bu anlamda bu denklemler bir başlangıç ve son öngören, belirlenebilirlerdir (deterministiklerdir). Klasik mekanik yasalarının oluşturduğu çerçeve günümüzde uygulamada olan birçok mühendisliğin alt yapısını oluşturur. Kabaca 1700-1900 döneminde etkin olan bu bilim çerçevesi bugün mekanik dünya görüşü dediğimiz mühendislikten sosyolojiye birçok bilim alanını etkilemiştir. İri ölçekli nesnelerin düşük hızlardaki davranışını iyi belirleyen bu mekanik birbirine göre ivmeli hareket eden sistemlerde iyi sonuç vermiyordu bu problem Albert Einstein tarafından özel ve genel görelilik teorisi ile düzeltildi ve klasik mekanik çerçevesi tamamlandı. 1900 yıllarının başında atomik ölçekte yapılan bazı deney sonuçları ile Klasik mekanik yasalarının uyuşmadığı görüldü dönemin Planck, Bohr, Heisenberg, Schrödinger, Born, Einstein ve Pauli gibi bilim adamları atomik ölçekteki fizik olaylarını açıklayan Kuantum mekaniğini oluşturdular. Kuantum mekaniği yasaları birçok açıdan klasik mekanik yasalarından farklıdır, bunların başında bir parçacığın nasıl tanımlanacağı gelir. Klasik fizik yasalarına göre bir parçacık belli bir kütleye, konuma sahiptir. Bu durum gözlemden bağımsızdır. Kim nasıl bir yöntem ile ölçerse ölçsün aynı kütle konum, momentum gibi fiziksel büyüklükleri elde eder. Parçacığın üzerine etki eden kuvvetler ve başlangıç koşulları biliniyorsa parçacığın zaman içindeki davranışı tamamen bilinir. Bu durum kuantum mekaniğinde biraz farklıdır parçacık ölçüm sistemine dolayısı ile ölçene göre bazen parçacık bazen de dalga gibi davranır. Parçacığı belirleyen fiziksel büyüklük parçacığa ait Schrödinger dalga denkleminin çözümü olan bir dalga fonksiyonudur bu fonksiyon kompleks (sanal, reel olmayan) bir fonksiyon olduğu için doğrudan kendisinin değil, karesinin parçacıkla ilgisi vardır ve parçacığın bir bölgede bulunma olasılık yoğunluğunu verir. Bu nedenle klasik mekanikte parçacığın konumu, momentumu gibi fiziksel büyüklükleri kesin olarak ölçülebiliyor iken kuantum mekaniğine göre bu büyüklükler belli bir olasılığa göre ölçülebilirler. Klasik mekaniğe göre bir parçacığın konumu ve momentumu aynı anda kesin olarak ölçülebildiği halde kuantum mekaniğinde bu mümkün değildir, bu büyüklükler aynı anda ancak belli bir belirsizlik hassasiyeti ile ölçülebilirler. Kuantum mekaniğindeki bu olasılıklı yapı daha önce klasik mekanik yasalarına göre tanımlanmış birçok bilimsel kavramın yeniden sorgulanmasına ve tartışılmasına neden olmuştur (Faye, 2019). Günümüzde de doğa yasalarının deterministtik ya da olasılıkçı yapıda olup olmadığı konusunda tartışmalar sürmektedir. Sonuç olarak günümüzde makro ölçekte klasik fizik yasaları atomik ölçekte ise kuantum fiziği yasalarının geçerli olduğu konusunda bir görüş hakimdir. Bu iki mekanik arasında nasıl geçiş olacağı uygunluk ilkesi veya karşılığı bulunma ilkesi ile açıklanmıştır. Bir sistemi incelerken ölçek olarak makroskobik (iri ölçek) ve mikroskobik (atomik) ölçek gibi bir ayrım yapılacağı gibi, sistem çok parçacıklı bir yapıya sahip ise bu durumda da sistemi oluşturan parçacıkların rastgele veya eş uyumlu hareketine göre de bir sınıflandırma yapılabilir. Eğer sistem rastgele dağılımlı bir dinamiğe sahip ise olasılık teorisi yasalarına dayanan istatistik mekanik kullanılabilir, eğer sistemi oluşturan parçacıklar eş evreli(coherent) bir dinamiğe sahip iseler bu durumda istatistik yapmak uygun değildir ve alan teorisi gibi ortak davranış teorileri kullanılmalıdır. Bu durum aşağıdaki Tablo 1'de özetlenmiştir.

Tablo 1. Fiziksel Sistemlerin Ölçek ve Davranışlarına Göre Sınıflandırılması.

	Makro ölçek: Klasik Mekanik + Görelilik Teorisi. (Makro moleküllerden galaksilere kadar geniş bir aralık.)	
Ortak davranan, eş evreli (coherent) sistemler. (Dalgalar, lazer, hologramlar, solitonlar...) Makro+ Mikro Ölçek	Kompleks sistem, tablodaki tüm durumları kısmen içeren sistemler.	Rasgele davranan, eş evreli olmayan sistemler, İstatistik Mekanik (olasılık yasaları) Makro+Mikro ölçek
	Mikro (atomik) ölçek: Kuantum mekaniği. (Atom ve Molekül sistemleri, atom altı parçacıklar).	

Tablo 1'de kompleksite ölçek ve davranış sınıflandırmasının ortasına yerleştirildi çünkü kompleks sistemler bu durumların hepsini kısmen de olsa içerir. Tabloda kompleksite dışında tanımlanan kalan sistemleri inceleyen teorilerin oluşturduğu matematik denklemleri klasik dönemde ve günümüzde çoğunlukla lineer denklemlerdir. Bunun birkaç nedeni vardır. Evrenimizin yapısını ve davranışını temsil eden bu denklemler yüksek simetrili, sade ve matematiksel çözümleri kesin olarak yapılabilir olmalıydı çünkü bu dönem düşünürleri için yüksek simetrinin aynı zamanda evreninin estetiğinin kaynağı olduğu görüşü hakimdir. Lineer denklemler çözümleri başlangıç koşullarına göre belli davranışı olan ve başlangıç koşullarındaki küçük değişimlerin genel davranışta küçük değişimlere neden olduğu denklemlerdir. Aynı zamanda bu lineer denklemler, sistemi oluşturan parçaların bireysel davranışlarının toplamı ile sistemin toplam davranışının aynı olduğu, sistemin çoğunlukla parçalara ayrışabildiği durumları ifade eden, sisteme yapılan etki ile sistemin yanıtının doğrusal olduğu durumların oluşturduğu denklemlerdir. Bu yaklaşım özelikle birkaç parçacıktan oluşmuş sistemler, düzenli (periyodik) yapıya sahip fizik, kimya ve mühendislik sistemleri için oldukça iyi sonuçlar vermektedir. Lineer teorilerde simetrisi bozuk olan veya lineer olmayan durumlar ise bu lineer durumlara küçük değişimler eklenerek yaklaşık yöntemlerle incelenir. Bu duruma örnek olarak Güneş sistemimiz verilebilir. Güneş sistemi belli bir periyodik yapıya sahiptir ve bu periyodik davranış Klasik fizik sistemi olarak Kepler yasaları ile ifade edilir. Bu teoride Güneş sistemindeki birtakım simetri bozuklukları ihmal edilir, bu ihmal belli zaman süreleri için (evrenin yaşına göre görece kısa) sistemin davranışının periyodik olduğunu belirtir. Fakat uzun zaman sürelerinde ihmal edilen büyüklüklerin etkisi ile güneş sisteminim kaotik bir dinamiğe sahip olacağı ve dağılacağı bilinen bir gerçektir (Peterson, 1993). Benzer şekilde elektromanyetik dalgalar, basit atomların yapısı lineer kuantum mekaniği kullanılarak açıklanabilir. Doğada gerek makro gerekse atomik ölçekte bu lineer denklemlerle açıklanamayan birçok durum da söz konusudur. Örneğin atmosfer olayları, depremler, girdap olayları, maddenin faz geçişi durumları gibi daha pek çok fiziksel olay lineer denklemlerle açıklanamayan olaylardır. Bu nedenle bu sistemler doğrusal olmayan bilim yardımı ile incelenmektedir. Fizik sistemlerine benzer şekilde Sosyal sistemlerin sınıflandırılması da şöyle yapılabilir.

Tablo 2. Sosyal Toplulukların Ölçek ve Davranış Şekline Göre Sınıflandırılması

	Makro topluluklar, büyük insan toplulukları, kıtalar, ülkeler, BM, vb.	
Ortak bir amaca (hedefe) sahip bireylerin oluşturduğu topluluklar. Makro + Mikro Ölçek.	Kompleks topluluk, bu dört durumun hepsini kısmen içeren sistemler.	Rastgele bir araya gelmiş bireylerden oluşan topluluklar. Makro + Mikro Ölçek.
	Mikro topluluklar, aile fertleri, şubeler, amatör gruplar...	

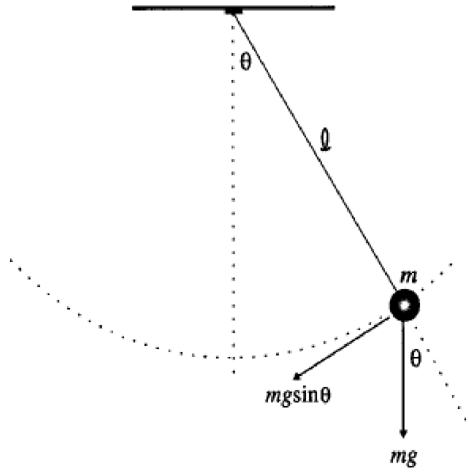
Fiziksel büyüklükler için Tablo 1'de verilen yaklaşım biyoloji, sosyoloji, ekonomi gibi birçok sisteme de genişletilebilir. Bu durumda biyoloji ve sonrası sistemlerin davranışının çok küçük bir kısmı lineer teorilerle açıklanabilir, bu sistemler genel olarak lineer olmayan davranış gösterirler. Bilgisayarların yaygın olmadığı dönemlerde fiziksel sistemlerin davranışı için lineer denklem ve denklem sistemleri kullanılmaktaydı, bu nedenle türbülans olayı, atmosfer olayları, faz geçişleri gibi karmaşık ve analizi zor problemlerin incelenmesi için yaklaşık yöntemler ve sayısal yöntemlere ihtiyaç vardı. Yarım asır önce yaygın olmayan bu yöntemler bilgisayar teknolojisinin ve sayısal analiz yöntemlerinin gelişmesi ile bilimsel hesaplamaların merkezine yerleşti.

2. Doğrusal Olmayan Dinamik Sistemlere Bazı Örnekler

2.1. Basit Sarkaç

Şekil 1'de verilen basit harmonik salınıcıyı ele alalım, l uzunluklu bir ipin ucunda m kütleli bir cisim şekilde verilen salınım hareketini yapsın. Bu sistem doğrusal olmayan dinamik bir sistemdir, bazı varsayımlar altında basit harmonik hareket yapar, fakat genel davranışı daha karmaşıktır.

Şekil 1. Basit Sarkaç



$\vec{F} = m\vec{a}$ Dinamiğin temel yasası denklemi kullanıldığında ($x = l\theta$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$) olmak üzere sarkacın hareket denklemi; $\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0$ şeklinde bulunur. $\text{Sin}\,\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \ldots$ şeklinde $\theta'nın$ doğrusal olmayan bir fonksiyonudur. Burada θ küçük ise $\sin\theta \simeq \theta$ alınıp $\ddot{\theta} + w_0^2\ \theta = 0$ doğrusal denklemi elde edilir ve denklemin çözümleri $\ddot{\theta}(t) = ASin(wt + \varphi)$ şeklinde periyodik bir fonksiyondur. Fakat θ büyük ise $\sin\theta \simeq \theta$ yaklaşımı çalışmaz, bu nedenle doğrusal olmayan denklemi çözmemiz gereklidir.

Doğrusal olmayan sönüm: Viskoz bir akışkan içinde hareket eden cisim problemi fizikteki önemli bir problemdir. Bu problemde sürtünme kuvvetlerinin önemli etkileri vardır. Örneğin, havada hareket eden bir (roketin, uçağın, uydunun, vb.) cisim üzerine etkiyen sürtünme kuvveti yüksek hızlarda oldukça önemlidir. Cisim hızı $\vec{v}$, cisme etkiyen kuvvet $F(\vec{v})$ ise bu kuvvetin analitik olarak belirlenmesi mümkün değildir. Fakat basitçe $F{\sim}|\vec{v}|^{n-1}\vec{v}$ gibi düşünülebilir. Buna göre yer yüzeyine yakın bir yerde cismin hareket denklemi $m\frac{\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - mk|\vec{v}|^{n-1}\vec{v}$ şeklindedir. ($k > 0$ sabiti viskozite ve geometriye bağlı). Deneysel verilere göre $v_1 \leq 24\ m/s$ için $n = 1$ Stokes yasası geçerlidir, $v_1 < v < v_s$ (v_s: $ses\ hızı \cong 330 m/s$) ise $n = 2$ alınabilir. Bu ise Newton Direnç Yasası olarak bilinir. $n = 1$, ve $n = 2$ için denklem analitik olarak çözülebilir. $v_s < v \leq 600\ m/s$ aralığında havada hareket eden bir cisme karşı havanın gösterdiği direnç oldukça artar[1] (patlama yapar) ve $600 m/s$' den sonra tekrar doğrusal olarak davranır. Bu konu otomobil ve uçak sektöründe oldukça önemlidir (Marion & Thornton, 1995).

2.2. Kulak Zarının Titreşimi

Newton'un 2.yasası biyolojik sistemlerin hareketini anlamada da kullanılabilir. Orta kulakta bulunan kulak zarının titreşimi (denge noktası etrafında) bir boyutlu sistem gibi düşünülebilir. $x(t)$ kulak zarının denge konumundan ayrılma mesafesi olsun, $F(x)$, zar $x(t)$ kadar yer değiştirdiğinde geri getirici kuvvet olmak üzere küçük x yer değiştirmeleri için $F(x)$ Taylor serisine açılabilir.

$$F(x) = F_0 + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial x^3}\right)_{x=0} x^3 + \cdots$$

[1] Bu olay son yıllarda ses duvarını aşan uçaklar için alışık olduğumuz bir durumdur.

$x = 0$ $için$ $F_0 = 0$ (denge noktası), kuvvetin geri getirici olması için $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{x=0} < 0$ olmalı. Bu terim $-k$ alınırsa küçük yer değiştirmeye karşılık gelen x' li terimin en küçük üslü olanı etkin olduğu düşünülüp serideki diğer terimler ihmal edildiğinde $F(x) = -kx$ şeklinde Hooke Yasası elde edilir. m kulak zarının kütlesi olmak üzere $F(t)$ kulak zarına gelen ses basıncının oluşturduğu periyodik kuvvet ise Newton'un 2. denklemine göre kulak zarının hareketinin denklemi $m\ddot{x} = -kx + f(t)$ veya $\tilde{\omega}_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $F(t) = \frac{f(t)}{m}$ olmak üzere $\ddot{x} + \tilde{\omega}_0^2 x = F(t)$ şeklinde zorlamalı basit harmonik salınıcı denklemi elde edilir. Kulak zarına etki eden $F(t) = Acos(\omega t)$ şeklinde ise, kulak zarı başlangıç periyodundan sonra yalnızca ω frekansına yanıt verir. Bu ω dışındaki seslerin (harmoniklerin) kulak zarı tarafından algılanması için, $F(x)$ bağıntısındaki doğrusal olmayan terimlerle de bağlantı kurulmalıdır. Kulak zarı üzerine yapılan deneylerde, ses basınç kuvvetinin kulak zarını asimetrik olarak etkilediği görülmüştür. Taylor açılımındaki 2. terimi göz önüne alacak olursak ve $\frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)_{x=0} = -\beta m$ diyecek olursak, kulak zarının titreşimini veren denklem $\ddot{x} + \tilde{\omega}_0^2 x + \beta x^2 = F(t)$ şeklinde yazılabilir. Bu zorlamalı doğrusal olmayan salınıcı denklemidir. Denklemdeki lineer olmayan x^2 'li terim asimetriyi temsil etmektedir.

2.3. Rekabet Olayı ve Volterra-Lotka (V-L) Yarış Denklemleri

Doğada birçok sistem birbiri ile rekabet halindedir, bu sistemler biyolojik, fiziksel veya sosyal sistemler olabilir, bu sistemleri temsil eden denklemler doğrusal olamayan denklemlerdir. (V-L) Biyolojik canlılar arasındaki etkileşmeyi veren denklemdir. 1905-1923 yılları arasında Adriyatik'te yakalanan balık miktarı analizine dayanmaktadır. Bu süre içinde büyük balık ve küçük balık popülasyonundaki değişime bakılmıştır. $N_B =$ büyük balık sayısı $N_L =$ küçük balık sayısı olmak üzere balık popülasyonunun değişimini veren gözlemsel veya "*phenomenological*" bir çift denklem şu şekildedir.

$$\dot{N}_B = (-\alpha_B + g_B N_L)N_B, \quad \dot{N}_L = (+\alpha_L - g_L N_B)N_L \quad \left(\dot{N}_\iota = \frac{d\,\dot{N}_\iota}{dt},\ \alpha_i, g_i > 0\right)$$

Balıklar arasında etkileşme yok ise $g_B = g_L = 0$ olacaktır bu durumda balık popülasyonu veren birbirinden bağımsız iki lineer denklemin çözümleri $N_B\,\alpha\,e^{-\alpha_B t}$, $N_L\,\alpha\,e^{+\alpha_L t}$ şeklindedir. Eğer bir etkileşme var ise büyüme katsayısı $+g_B N$ ve azalma katsayısı $-g_L N$ devreye girecek ve diferansiyel denklemin yapısı değişerek döngüsel bir yapıya sahip olacaktır. Denklemlerin doğru ve çabuk çözümleri popülasyondaki başlangıç koşullarının kesinliğine ve etkileşme şekillerinin sadeliğine bağlıdır (Neff & Tillman, 1975).

Elektronik salınıcı (Van der Pol denklemi) doğrusal olamayan sistemler teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynamıştır, çünkü bu denklem, doğrusal problemlerde karşılaşılmayan sonlu çevrim (*limit cycle*) özelliği gösterir. Sonlu çevrimli durumda, sistemin başlangıç koşulları ne olursa olsun, sistem bir periyoda yakınsar ve periyodik davranış özelliği gösterir. Bütün elektronik salınıcılar, birçok akustik veya mekanik sistem, kalp atışı gibi sistemler sonlu çevrim özelliği gösterirler. Bu sistemlerin dinamiğini veren denklem $\ddot{X} - \epsilon(1 - X^2)\dot{X} + X = 0$ şeklinde doğrusal olmayan bir denklemdir. Burada $\epsilon > 0$ olan ve devre elemanları ile ilgili bir parametredir, X ise elektronik salınıcı için yer değiştirme büyüklüğüdür. $X > 1$ için lineer olmayan sönüm terimi salınıcının büyüklüğünü azaltacak şekilde, $X < 1$ için ise negatif sönüm söz konusu, yani salınımın büyüklüğü artacak yöndedir (Van der Poll, 1926).

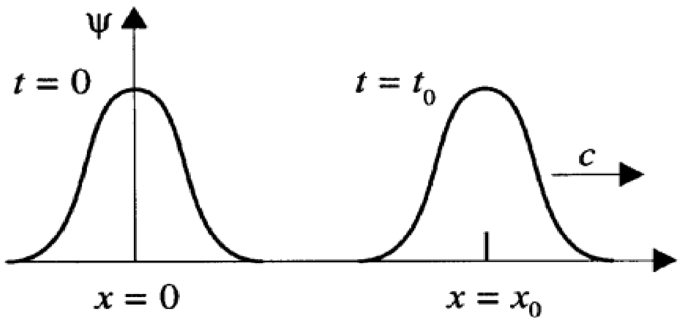
2.4. Doğrusal Dalga Denklemi ve Solitonlar

Sürekli bir ortamda bir dış etken tarafından oluşturulmuş doğrusal dalga denklemi $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0$ şeklindedir. Şekil 2'de gösterilen ve belli bir ortamda c hızı ile ilerleyen atma şeklindeki bir dalga ortamı oluşturan bileşenler arası etkileşmelere (veya sürtünmelere) göre bir süre sonra sönüme uğrar, bu ise dış etkinin oluşturduğu değişimin yok olması demektir. Bu sönümün olmaması için sistemde iç sürtünmeleri dengeleyecek bir geri besleme etkisi olmalıdır. Bir dalganın sönüme uğramadan yapısını korumasına soliton denir. Bu kararlı yapılar doğrusal dalga denklemi ile elde edilemezler, bu nedenle denklemlerde doğrusal olmayan terimler olmalıdır ve bu doğrusal olmayan terimler denklemin temsil ettiği sistem için geri besleme etkisi oluştururlar. Bu tür denklemlere örnek olarak sığ sularda oluşan dalga denklemi (bir boyutlu Boussinesq denklemi) verilebilir:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}+6\frac{\partial^2(\psi^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}=0$$

Dikdörtgen bir kanalda düzgün akan bir suda ani bir değişim sonucu oluşan dalgalar $\frac{\partial\psi}{\partial t}+\alpha\psi\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{\partial^3\psi}{\partial x^3}=0$ (Korteweg-de Vries (KdV) denklemi) ve Manyetik bir ortamda sipin dalgalanmalarını veren $\psi_{xx}-\psi_{tt}=sin\psi$ (Sine Gordon denklemi) denklemleri verilebilir. Bu denklemler belli koşullar altında soliton çözümleri verirler.

Şekil 2. Bir Ortamda c Hızı ile İlerleyen Atma (Puls) Şeklindeki bir Dalganın Grafik Gösterimi



Soliton yaklaşımı günümüzde doğrusal olmayan bilimin önemli bir çalışma alanıdır (Scott vd., 1973).

2.5. Rayleigh-Benard Konveksiyonu ve Lorenz Denklemleri

Bir kapta veya bölgede bulunan bir akışkanı göz önüne alalım. Akışkan alt kısımdan ısıtıldığında ısının düşey doğrultuda yukarı bölgelere nasıl ulaşacağı akışkanlar mekaniği için önemli bir problemdir. Akışkan üst üste sonsuz tane ince tabakadan oluşmuş varsayılabilir. Tabakalar arasındaki ΔT sıcaklık farkı küçük ise akışkan dengededir ve ısı iletim yolu ile üst tabakalara iletilir. Fakat ΔT sıcaklık farkı belli bir kritik değerin üzerine çıkarılır ise konveksiyon olayı oluşur. Lord Rayleigh akışkanda sıcak kısımlarda akışkanın yukarı hareketi ve soğuk kısımlarda aşağı doğru hareketi sonucu birbirine komşu yuvarlanan silindirler şeklinde bir yapı oluştuğunu gözlemlemiştir. Sıcaklık farkı daha da artırılır ise daha karmaşık (kaotik) yapılar oluşur (Koschmieder, 1974). Sıcaklık ve akışkan yoğunluğunun değişimine göre silindirik yapıların altıgen yapılara dönüştüğü de gözlenmiştir, bu ise simetri kırılmasının güzel bir örneğidir. Edvard Lorenz benzer yaklaşımla atmosferde ısı iletimini modellemeye çalıştı bunun sonucu başlangıç koşullarına göre kaotik davranış gösteren aşağıdaki Lorenz denklemlerini elde etti (Lorenz, 1963).

$$\dot{x}=\sigma(y-z)$$

$$\dot{y}=rx-y-xz$$

$$\dot{z}=xy-bz$$

Bu denklemlerde x, y, z reel değişkenler, σ, r, b ise başlangıç koşullarını sağlayan reel sabitlerdir. Lineer olmayan Lorenz denklemleri kaotik davranış gösteren sistemlerin ilk örneklerinden birisidir.

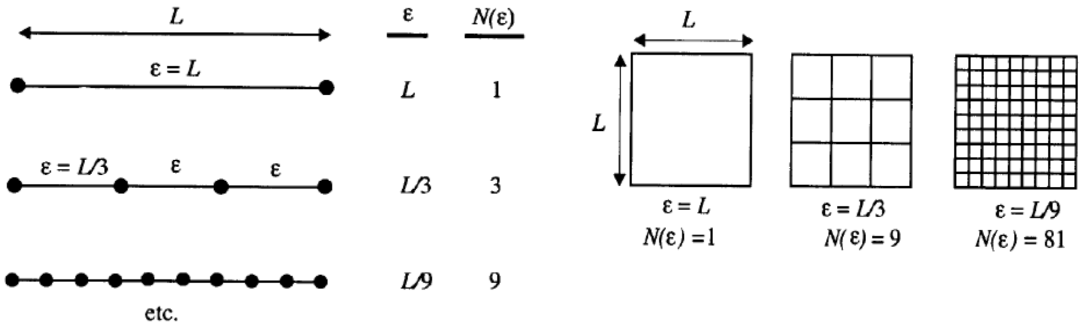
Bu birkaç örneği verilen lineer olmayan sistemlerin davranışlarının incelenmesi için genel olarak topolojik, analitik ve nümerik yöntemler kullanılır.

Topolojik yöntemde sistemi oluşturan değişkenlerin sistemin başlangıç koşulu parametrelerine göre oluşturduğu faz uzayında nasıl davranacağı incelenir. Bu yöntem sistemin faz uzayındaki akış karakteri, sistemdeki tekilliklerin yapısı gibi sisteme ait niteliksel özellikleri belirler. Analitik yöntemde ise sistemi tanımlayan adi veya kısmi diferansiyel denklemler veya denklem sistemleri analitik olarak çözülür. Fakat daha önce de belirtildiği gibi lineer olmayan sistemlere ait denklemlerin analitik çözümleri kolay değildir çünkü bu durumda sistemin simetri gibi özelliklerinden faydalanılarak denklem çözümleri elde edilir fakat sistemdeki simetrinin tanımlanması her zaman kolay değildir. Nümerik yaklaşımda ise sisteme ait denklemler veya denklem sistemleri günümüzde oldukça gelişmiş olan neredeyse her sisteme özgü tanımlanabilen yöntemlerle incelenir. Topolojik yöntemde faz uzayı analizi kısaca şöyle özetlenebilir. $\frac{dx}{dt} = P(x, y)$, $\frac{dy}{dt} = Q(x, y)$ gibi diferansiyel denklemleri göz önüne alalım. P ve Q , x ve y ye lineer bağlı olmayan fonksiyonlar, t ise bağımsız değişken olsun. Matematikçiler P ve Q nun t ye açıkça bağlı olmadığı bu denklemleri otonom denklemler olarak adlandırırlar. Bütün mekanik problemleri Newton' un 2. Yasasına göre $\vec{F} = m\vec{a}$,$\vec{F} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x}$ şeklinde yazabilir. Sisteme etkiyen kuvvet (mekanik kuvvet) konumun veya hızın fonksiyonu olabilir. Buna göre $F = F(x, \dot{x})$ ya da $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$ yazabilir, $\dot{x} = \frac{dx}{dt} = y \Rightarrow \ddot{x} = \dot{y} = F(x, y)$ buna göre $P(x, y) = \frac{dx}{dt} = y$ $Q(x, y) = \frac{dy}{dt} = F(x, y)$ yazılabilir. Bu durumda t zaman parametresi elimine edilirse, $\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)}$ şeklinde zamandan bağımsız bir denklem elde edilir. Bu denklemin çözümleri, zaman ilerledikçe, faz düzleminde sistemin davranışını faz yörüngeleri olarak adlandıracağımız çözümlerini verir. Newton denklemlerinin çözümlerinde faz düzlemi x ve $\dot{x}$ ile belirlenir, halbuki yarış denklemlerinde faz düzlemi popülasyonu oluşturan ikililer oluşturur (tavşan, tilki sayıları vb.). Genel olarak $y(x)$ fonksiyonunun elde edilmesi zor olabilir. Bu durumda topolojik yaklaşım bize bu tür denklemlerde, faz düzleminde (x_0, y_0) gibi belirli özel noktaların (kararlı veya tekil noktalar) olduğunu ve çözümlerin genel yapısının bu noktalar yardımı ile yapılabileceğini söyler. Verilen bir otonom sistemde $P(x_0, y_0) = 0$ ve $Q(x_0, y_0) = 0$ olduğu bir nokta kritik nokta olarak adlandırılır. Faz düzleminde lineer davranış ait yörünge çizgileri ve basit tekil nokta tipleri aşağıda tablo halinde verilmiştir. Korunumlu sistemlerde sistemin hareketi sistemin toplam mekanik enerjisinin belirlediği bu faz eğrilerinin biri üzerinde hareket eder. Sistem korunumlu değilse sistemin mekanik enerjisi sürtünme kuvvetleri etkisi ile azalacak ve sistem merkezde bulunan tekil noktalara doğru hareket edecektir. Bu tekil noktalar basit çekici olarak da adlandırılır. Doğrusal davranış için faz uzayının bu basit yorumu kaotik davranış için farklılık gösterir, kaotik sistemlerde çekicilerin faz uzayındaki davranışı Lorenz Kelebeğinde olduğu gibi acayip çekici olarak adlandırılır. Çekicileri sınıflandırmak için Poincaré kesiti yöntemi kullanılabilir. Poincaré kesiti söyle elde edilir, sistemin faz uzayında faz yörüngelerine dik bir düzlem yerleştirilir, faz eğrilerinin bu düzlemi kestiği noktalar Poincaré kesitini oluşturur. Basit çekiciler için bu kesitler düzenli bir yapıya sahip noktalar veya doğrular gibi tam boyutlu basit geometriye sahiptirler. Tuhaf çekiciler için ise Poincaré kesiti basit geometrik şekiller yerine fraktal yapıya sahip şekillerdir. Basit tekil noktalar ve Poincaré kesiti Şekil 4'te verilmiştir. Şekil 5'te ise acayip çekici olarak Lorenz ve Rösleer çekicileri verilmiştir.

2.6. Lineer Olmayan Geometri ve Fraktal Boyut

Lineer olmayan sistemler geometrik olarak da doğrusal sistemlerden farklılık gösterirler. Buna bir örnek olarak fraktal boyut gösterilebilir. Lineer sistemlerde bir boyutlu yapılar bir doğru ile temsil edilir, benzer şekilde iki boyutlu yapılar bir yüzey ile ve üç boyutlu yapılar çeşitli üç boyutlu yapılarla temsil edilirler. Bir boyutlu lineer durumda başlangıç ve son bellidir. İki doğrunun kesişimi bir nokta şeklindedir. İki boyutlu durumda yüzeyin ön arka veya alt üst tarafları bellidir, iki yüzeyin kesişimi bir eğridir. Alt yüzden üst yüze sürekli olarak geçiş yapılamaz, geçiş esnasında eğrisel bir süreksizlik vardır. Üç boyutlu geometrik yapılarda iç kısım dış kısım gibi ayrımlar açıktır ve tanımlarında herhangi bir anlaşılmazlık yoktur. İç yüzden dış yüze geçiş sürekli değildir yüzeysel bir süreksizlik vardır. Uzay ve zaman bileşenleri göz önüne alındığında $1, 2, 3$ veya $1 + 1, 1 + 2, 1 + 3$ ya da N tamsayı olmak üzere $N + 1$ tam sayı boyut geçerlidir. Bunun yanında lineer olmayan geometriler için lineer geometri için bahsedilen büyüklükler biraz farklılık gösterir. Buna göre başlangıç ve son Kantor tozunda olduğu gibi tanımlı değildir. Yine Möbius şeridi için alt yüz üst yüz ayrımı yapılamaz, benzer şekilde Klein şişesi için iç kısım dış kısım ayrımı yapılamaz. Bunun yanında anakaraların sahil kıyılarının uzunluğu, sünger yapıların doluluk miktarları, gökyüzündeki bulutlar gibi fiziksel nesnelerin boyutu (kapasite boyutu) tam sayı olmayan, kesirli sayılarla ifade edilirler. Bu tür kesirli boyuta sahip sistemler fraktal yapılar olarak tanımlanır.

Fraktal yapıların kapasite boyutu şöyle hesaplanır. Göz ününe aldığımız bir ve iki boyut için ε ve $N(\varepsilon)$ aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



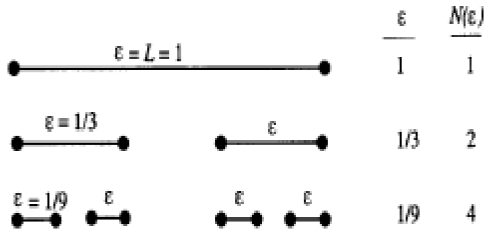
Şekilde belirtildiği gibi $1D$ doğru için $\mathrm{N}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{L}}{\varepsilon}$, $2D$ düzlem için $\mathrm{N}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{L}^2}{\varepsilon^2}$, $3D$ için $\mathrm{N}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{L}^3}{\varepsilon^3}$ $\ldots D$ boyuta genellediğimizde $\mathrm{N}(\varepsilon) = \frac{\mathrm{L}^\mathrm{D}}{\varepsilon^\mathrm{D}}$ yazılabilir. Bu bağıntıdan kapasite boyutu D çözülebilir. $\mathrm{N}(\varepsilon) = \left(\frac{\mathrm{L}}{\varepsilon}\right)^\mathrm{D} = (\mathrm{L}.\frac{1}{\varepsilon})^\mathrm{D} = \ln \mathrm{N}(\varepsilon) = \mathrm{D}(\ln\mathrm{L} + \ln\frac{1}{\varepsilon})$, $\mathrm{D} = \frac{\ln\mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln\mathrm{L}+\ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \ln\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \gg \ln\mathrm{L}$ olduğu için $\mathrm{D} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\ln\mathrm{N}(\varepsilon)}{\ln\frac{1}{\varepsilon}}$ bulunur. Bu ise kesirli bir değere sahiptir. Bu kesirli değeri görmek için Cantor seti olarak adlandırılan aşağıdaki örnek verilebilir. Bir boyutlu L uzunluklu bir doğruyu göz önüne alalım, doğruyu üçe bölüp ortadaki parçayı dışarda bırakalım, geri kalan parçalar için bu işlemi devam ettirelim. Bu durumda elde edilecek noktalar kümesi Cantor tozu olarak adlandırılır. Bu bir boyut içine gömülmüş sistemin kapasite boyutu şöyle hesaplanır.

$\varepsilon = (\frac{1}{3})^k$ olmak üzere $N(\varepsilon) = 2^k$ olacaktır. Cantor tozu vaya Cantor kümesinin kapasite boyutu $D_C = \lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ k\to\infty}}\frac{ln\mathrm{N}(\varepsilon)}{ln\frac{1}{\varepsilon}} = \lim_{k\to\infty}\frac{ln2^k}{ln3^k} = \frac{ln2}{ln3} = 0{,}6309$ ... olacaktır.

Cantor tozu fraktal boyuta sahiptir. Bu boyut sıfır değil, fakat 1 de değildir. Yani nokta veya doğru da değildir. Bu şekilde hesaplanmış fraktal boyutlar Koch kar yağışı parçası için $D = 1{,}26186$, Sierpinsky üçgeni için $D = 1{,}58496$, Lorenz çekicileri için $D = 2{,}06$, Lojistik

Harita için $D = 0{,}538$, Türbülans sistemi için $D = 2{,}1 - 4{,}1$, Bulutlar için $D = 2{,}35$ şeklindedir.

Cantor kümesinin şematik gösterimi



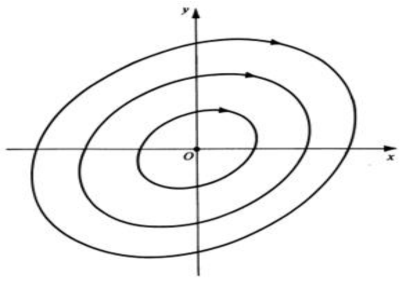
2.7. Lojistik Denklem ve Lyapunov Üsteli

$x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ Şeklinde doğrusal olmayan bir denklemi göz önüne alalım. Denklemdeki a parametresi $0 \leq a \leq 4$ aralığında, başlangıç değer x_0 $(0{,}1)$ aralığında seçildiğinde denklemin x çözümleri $(0{,}1)$ aralığında kalacaktır. Denklemdeki n biyolojik sistemler göz önüne alındığında zaman adımı olarak da ele alınabilir. Bu durumda x_0 belli bir andaki popülasyonu belirtiyor ise x_n belli zaman sonundaki popülasyonu belirleyecek şekilde ayarlanabilir. Aşağıda Şekil 6'da lojistik denklemin üç farklı çözümü verilmektedir. Denklemin $X_0 = 0.2$ başlangıç değeri ve n adım sayısı 60 alınarak a parametresini çeşitli değerleri için çözümler verilmiştir. $a = 2.8$ için sistem 1 periyoda sahip ve $x = 0.6428$ değerine yakınsamaktadır. $a = 3.3$ için sistem 2 periyoda sahip ve x değeri $x = 0{,}8236$ ile $x = 0{,}4794$ aralığında değişmektedir. $a = 3.8$ değeri için ise sistemin hangi periyoda sahip olduğu ve hangi x değerleri aralığında değiştiği belli değildir. Bu durum kaotik durum olarak tanımlanır. Bu bilgilere göre lojistik denklemin sistemdeki parametre ve başlangıç koşullarına göre periyodik ve kaotik davranış gösteren çözümleri vardır. Bu durum ayrıca faz yörüngelerinin davranışına göre $\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df(X_k)}{dX_k} \right|$ şeklinde tanımlanan Lyapunov üsteli ile de belirlenebilir (Wolf vd., 1985). Şekil 7'de Lojistik denklem için hesaplanmış Lyapunov üstelleri gösterilmiştir. Buna göre periyodik bölgede Lyapunov üsteli negatif değerler, kaotik olduğu bölgelerde ise pozitif değerler alır.

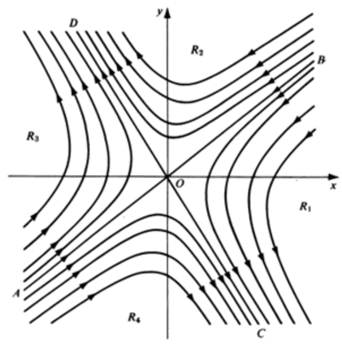
Şekil 6'da yukarıdan aşağı doğru, 1 periyotlu durum, 2 periyotlu durum ve kaotik durum, en alt şekilde ise x in a parametresine göre değişimi verilmiştir. Periyot katlanması $a \sim 3.6$ değerine kadar ayırt edilebilir durumdadır, bu değerden sonra denklemin çözümleri kaotik değerler alır, periyot katlanmaları artık ayırt edilemeyecek durumdadır. Buna uygun olarak Şekil 7'de Lyapunov üstelleri peryodik bölge için negatif değerler, kaotik bölgeler için ise pozitif değerler almaktadır.

Bu örneklerden sonra doğrusal olmayan sistemlerin davranışı için kısaca şunları söyleyebiliriz. Sistemin başlangıç koşulları ve sistemdeki parametrelere göre davranışı doğrusal (periyodik), kaotik ve rasgele olarak sınıflandırılabilir. Doğrusal çözümler tek periyotlu (veya değerli) veya çok periyotlu olabilir. Bu bölgede sistemde tekillikler olabilir ve bu tekillikler Şekil 4'te özetlendiği gibi basit tekil noktalardır. Buna göre bu bölge için çözümler analitik olarak elde edilebilir, sistemin davranışı tamamen belirlenebilir olduğu için sistemin deterministtik olarak adlandırılır. Bu durum Şekil 6'da tablodaki son satırda lojistik denklemde x in a parametresine göre değişimini veren $a \approx 3.6$ değerinden önceki duruma karşılık gelir. Benzer durumda Şekil 7'de bu periyodik bölge Lyapunov üsteli λ nın negatif değerler aldığı durumlara karşılık gelir. Bu lineer bölge için hesaplanan Poincare kesitleri basit geometrik şekillere sahiptirler. Bu lineer davranışın dışında sistem kaotik veya rasgele bir dinamiğe sahiptir. Kaotik bölgede sistemin durumu artık doğrusal değildir, sistemin durumu başlangıç değerlerindeki küçük değişimlere oldukça hassas bağlıdır.

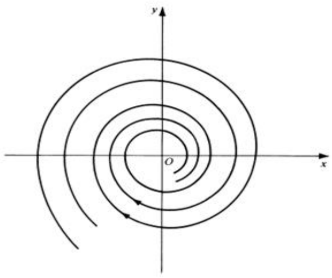
Şekil 4. Basit Tekil Noktalar ve Poincaré Kesiti



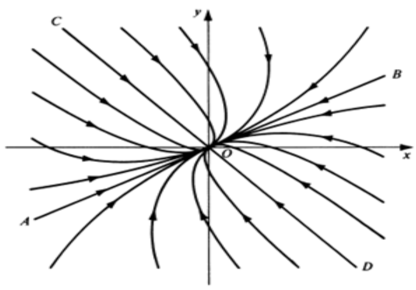
Merkez noktası



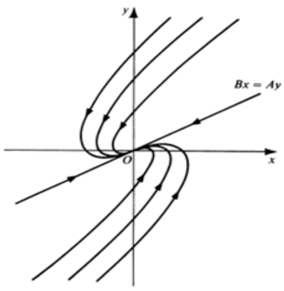
Eyer noktası



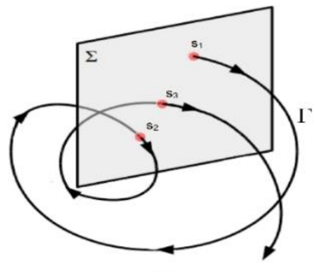
Spiral nokta



Düğüm noktası

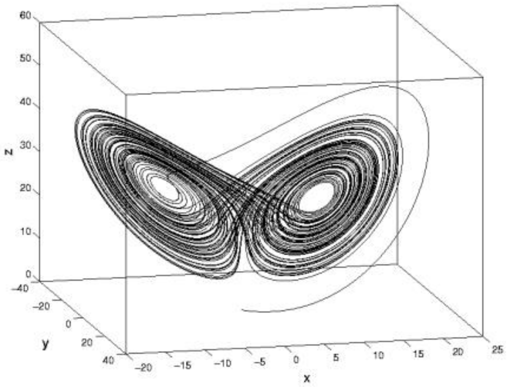


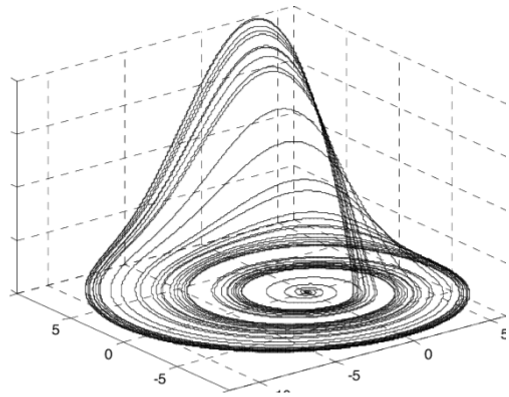
Sarmal Nokta



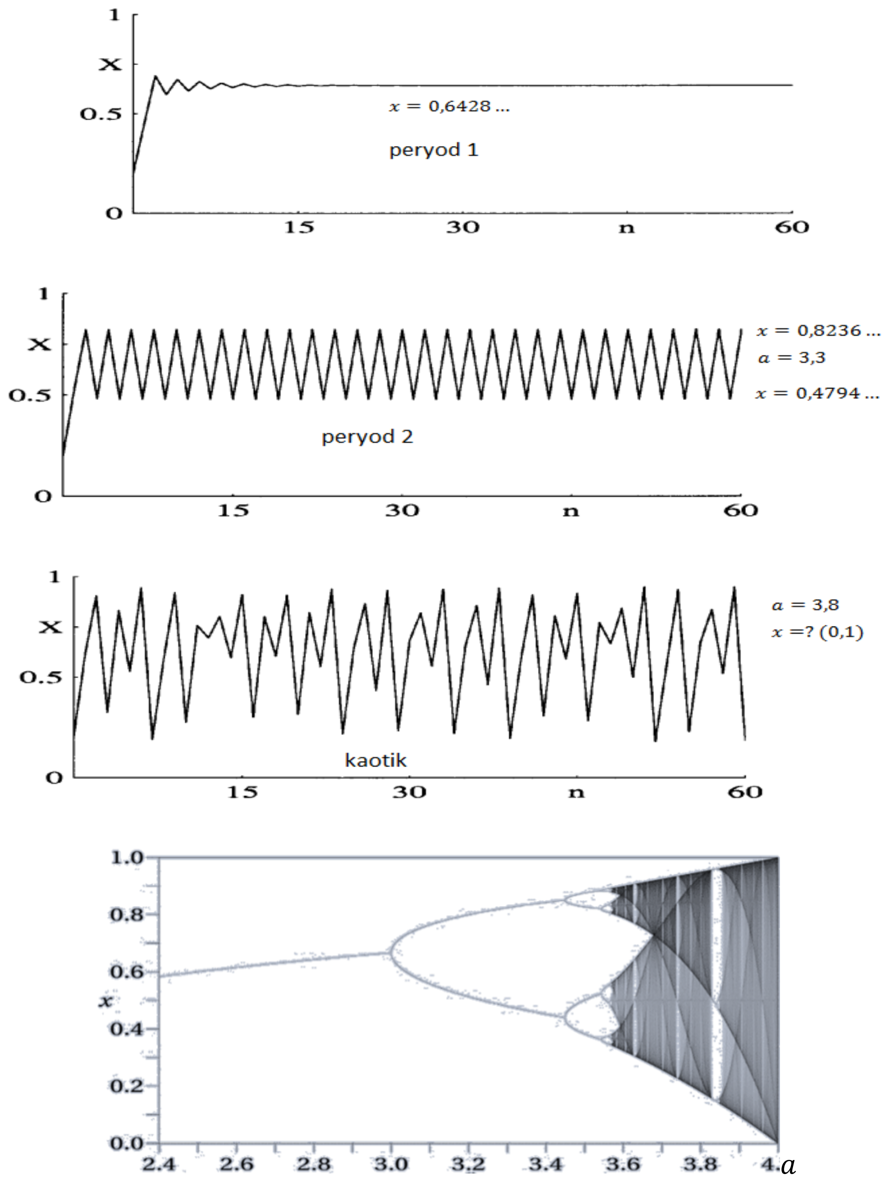
Poincaré kesiti

Şekil 5. Lorenz ve Rösleer Çekicileri

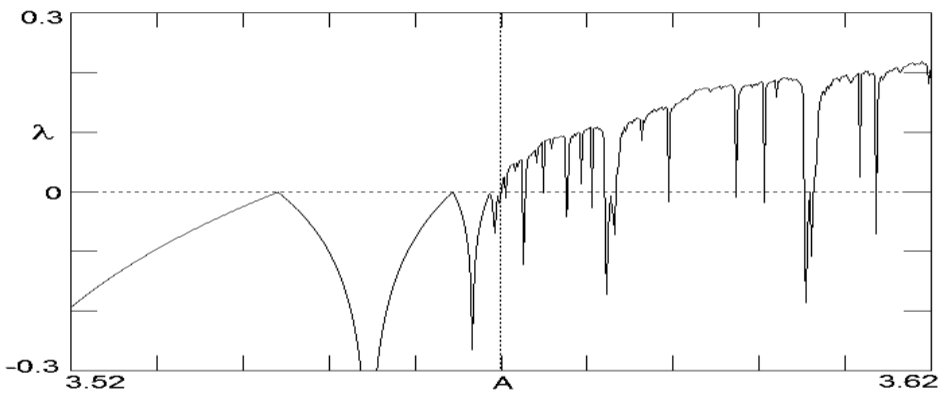




Şekil 6. Lojistik Denklem Analizi



Şekil 7. Lojistik Denklem Zaman Serisi için Lyapunov Üstelleri (Enns & McGuire, 1997).



Başlangıç değerleri veya sistemdeki parametrelerdeki küçük bir değişim bir süre sonra çok büyük değişimlere neden olur. Sistemin gelecekteki davranışı kesin olarak öngörülemez. Sistemin nasıl davranacağını ölçen testlerden birisi de Lyapunov üstelidir. Bu üstel bir başlangıç değerinde aralarında belli bir mesafe bulunan faz yörüngelerinin sistemin evrimi sırasında birbirinden ne kadar uzaklaşacağının ölçülmesine dayanan eksponansiyel bir üsteldir. Buna göre bir durum için sistemin Lyapunov üstelleri negatif ise sistem periyodik davranışa sahip olacaktır. Bu üstel pozitif değerler aldığında ise sistem kaotik davranacaktır. Şekil 7'de Lyapunov üstelleri lojistik denklem için gösterilmiştir. Periyodik bölgeden kaotik bölgeye sistem periyot katlanması veya çatallanma (bifurkasyon) yaparak geçiş yapar. Bu çatallanma sistemin kararsız olması veya kararlı yapının yok olası sonucu oluşur. Doğada birçok sistem bifurkasyon özelliği gösterir. Matematikçi Rene Thom özellikle biyolojik sistemlerdeki bifurkasyonlar yoluyla toplulukların niteliksel davranışlarındaki değişimleri açıklayan bir felaket (*catastrophe*) kuramını ortaya attı. Bu kurama göre sistemdeki parametrelerin oluşturduğu uzayda oluşacak bifurkasyon türlerini sınıflandırdı (Thom, 1989). Rasgele davranış bölgesinde sistem ile ilgili bir bilgi elde etmek mümkün değildir. Bu bölge kimi zaman beyaz gürültü olarak da adlandırılır.

Doğrusal olmayan sistemler termodinamik ya da istatiksel olarak da sınıflandırılır. Buna göre Prigogine gibi bazı bilim adamları termodinamiği üç gruba ayırır. 1- Denge durumu termodinamiği (Termostatik) (Clausius vd.), 2- Lineer termodinamik (akı ve elektriksel iletkenlik gibi lineer denklemlerle ifade edilen transport olayları) (Lars Onsager vd.), 3- Lineer olmayan termodinamik. Self organize sistemler, şok dalgaları gibi kompleks sistemlerde akı denklemleri lineer değil. (Prigogine vd.)

3. Entropi

3.1. Entropi Tanımı ve Bilgi Entropisi

Entropi tanımı ilk kez fizikte termodinamiğin ikinci yasası olarak ortaya çıkmıştır. Bilindiği gibi termodinamiğin birinci yasası bir sistemde iç sistemin iç enerjisinin de hesaba katılarak enerjinin korunumu yasasının ifade edilmesidir. İkinci yasa ise bir sistem ile çevresi göz önüne alındığında korunumlu olan toplam enerjinin sistem ve çevresi arasında nasıl paylaşılacağı ile ilgilidir. Clausius tarafında tanımlanan termodinamik entropi sistemin bir durum fonksiyonudur. Buna göre izole bir sistemde termodinamik bir süreçte $\Delta S \geq 0$ yasası geçerlidir. Burada entropideki değişimin sıfıra eşit olması tersinir süreçleri, sıfırdan büyük olması tersinir olmayan süreçleri ifade eder. İzole edilmiş kapalı bir sistemin entropisi, tersinmez süreçler için daima artar. Entropi maksimum olduğunda sistem dengededir ve Enerjisi minimumdur. Bu durum Maksimum entropi ilkesi olarak adlandırılır. Termodinamik Entropi aynı zamanda iş yapamayacak enerjinin, boşa harcanan enerjinin bir ölçüsü olarak da tanımlanabilir. Buna göre bir sistemin entropisi ne kadar düşük ise o kadar fazla iş yapabilir, tersine entropi maksimum olduğunda sistem hiç iş yapamaz. Entropinin artışı, enerjinin bir bölgede, daha yoğun durumdan, daha yaygın duruma kendiliğinden geçme ölçüsü olarak da adlandırılır. Entropinin artış yönü zamanın artış yönü olarak alınırsa, zaman oku tanımlanabilir. 2. yasayı düzensizliğin ölçüsü olarak da tanımlamak mümkündür, burada düzen göz önüne alınan sistemin iş yapabilme yeteneğine sahip olması, düzensizlik ise iş yapamama özelliğine sahip olması anlamında kullanılmalıdır. Termodinamik maddenin iri ölçekli görüngü bilimsel (fenomonolojik) bilimidir. Boltzmann ve Gibss (BG) mikroskobik ölçekte parçacıklar arası etkileşmeleri hesaba katarak maddenin makroskobik davranışını veren entropiyi $S_{BG} = -k \sum p_i \log(p_i)$ şeklinde tanımladılar. Boltzmann-Gibss istatistik entropisi de sistemi temsil eden bir durum fonksiyonudur. Buna göre N tane parçacıktan oluşmuş bir sistemi temsil eden bu durum fonksiyonu bilinir ise sistemin bütün termodinamik büyüklükleri elde edilebilir. Bu şekilde tanımlanan entropi sistemin oluşturduğu faz uzayının ağırlıklı hacmi ile ilgilidir. Bu nedenle entropinin artışı sistemin faz uzayının büyümesi ile ilgilidir. Bu tanıma göre bir sistemde entropi artışı sistemin düzensizliğinin artışına karşılık gelir.

Fiziksel sistemlerin davranışı için tanımlanan bu entropi tanımı Shanon tarafında bilgi teorisine de genişletilmiştir. Buna göre bir olayda mümkün durumların sayısı N_s olsun, bu durumda bilgi $I \propto N_s$ veya c bir sabit olmak üzere $I = cN_s$ yazılabilir. Birden fazla sistem söz konusu ise $N_s = c(taban)^I$ veya $I = c\ logN_s$ yazılabilir. Bir sistemle ilgili süreçte N_s toplam olay sayısı olmak üzere bir olayın olma olasılığı $P = \frac{1}{N_s}$ ise $I = clog(\frac{1}{N_s})$ veya $I = -clog(P)$ yazılabilir. Bilgi teorisinde I ya kod uzunluğu 1/P ye sürpriz denir. Shanon, Bell laboratuvarlarında sinyal iletiminde maksimum bilgi nasıl iletilir problemi ile uğraştı. Shanon'a göre mümkün olan bir olaylar kümesi alalım, bu olayların olma olasılığı $p_1, p_2, .., p_N$ olsun, bu olası durumlardan hangisinin olacağını bilinmiyor, bu nedenle herhangi bir olayın ölçülmesinde (belirlenmesinde) bir belirsizlik veya bir tercih var. Shanon yaptığı çalışma ile bu belirsizliğin $H_S = -K \sum_{i=1}^{N} p_i log(p_i)$ şeklinde tanımlanacağını gördü ve bu ifadeye Bilgi entropisi ismi verildi. Boltzmann entropisi fiziksel sistemleri ilgilendir, Shanon entropisi ise olasılıkları ilgilendiren çok daha geniş bir alana uygulanabilir. Günümüzde bilim adamları BG entropisini (veya Shanon bilgi entropisini) farklı birkaç yoldan non-extensive (yaygın olmayan) sistemlere genelleştirme ile ilgili çalışmalar yapmaktadırlar. Bu tür entropiler genelleştirilmiş entropi olarak adlandırılırlar (Masi, 2005).

3.2. Kolmogorov-Sinai Entropisi (KS)

Shanon entropisini kaos teorisi ile ilgilendirmek kolay değil, her zaman pozitif ve geniş bir değişim aralığına sahip. Bu nedenle Kolmogorov, metrik-entropi (teorik-ölçüm entropisi) tanımladı, buna göre sıralı olasılıkları kullanan, bir oran şeklinde olan, limit durumlara göre belirlenen KS entropisi

$$H_{KS} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{N_r} p_r \log\left(\frac{1}{p_r}\right) \right] / zaman \text{ veya } H_{KS} = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{t \to \infty} [H_t - H_{t-1}]$$

şeklinde yazılır. Burada ε olayın ölçüldüğü kutunun büyüklüğüdür. Limitler ε sabit ise zaman sonsuza ve verilen bir zaman için ε sıfıra gidecek şekildedir. H_t herhangi bir t anındaki entropidir. Buna göre deterministtik sistemlerde $H_{KS} = 0$, kaotik sistemlerde $H_{KS} > 0$, rasgele sistemlerde $H_{KS} = \infty$ değerlerini almaktadır.

Ilya Prigogine, Clausius entropisini açık sistemlere genişletmiştir. Clausius izole edilmiş bir sistemde entropinin artacağını belirtmişti. Pirogogine ise aynı zamanda sistem ile çevresi arasında bir entropi alışverişi olduğunu belirtmiştir. Buna göre toplam entropi değişimini $dS_T = dS_I + dS_E$ olarak ifade etmiştir. (Burada T indisi entropideki toplam değişimi, I indisi sistemin iç entropi değişimini, E ise sistem ile çevresi arasında değiş-tokuş yapılan entropiyi belirtmektedir). $dS_T > 0$ ise sistem düzenden kaosa geçer $dS_T < 0$ ise sistem kaostan düzene geçiş gösterir. $dS_I > 0$ olduğunda $dS_E > 0$ olduğu durumlarda sisteme entropi girer, o $dS_E < 0$ olduğu durumlarda sistemden entropi çıkar, $dS_E = 0$ olduğu durumlarda ise sistemin izole olduğu durumlara karşılık gelir. Sistemin toplam entropisi $dS_T > 0$ ve $dS_I = 0$, $dS_E < 0$ olduğu durumlar sistemin self organize olduğu durumlara karşılık gelir.

Lineer olmayan denklemlerin, bazı durumlar için kaotik çözümler verdiğini bilinmektedir. Buna göre kaotik davranan sistemler için de entropiye benzer bir büyüklüğün tanımlanması ile ilgili çalışmalar yapılmaktadır. Böylece bu sistemlerde zaman oku benzeri bir tanım yapılabilir. Bu çalışmalar J. Von Neuman, G. Birkhoff, E. Hopf, A. Kolmogorov, D. Anosov, V. Arnold, Y. Sinai gibi bilim insanları tarafından geliştirilmiştir. Bu çalışmalara göre dinamik sistemlerin davranışı, sistemin faz uzayındaki davranışına göre, Basit (periyodik), "*ergodic*", "*mixed ergodic*" (kaotik) olarak adlandırılabilir. Bu davranışlar içinden kaotik olanı başlangıç koşullarına çok duyarlı ve faz uzayındaki her yörünge birbirinden üstel olarak uzaklaştığı için, zaman geçtikçe bütün faz uzayını kaplar (Termodinamik denge). Bu durum "mixed ergodic flow" olarak adlandırılır ve kaotik dinamik sistemin davranışını belirler. Bundan daha rasgele davranış Kolmogorov'un anısına "*K-flows*" olarak adlandırılır. Bu durumda sistemin davranışı en üst belirlenemez durumdadır. Yani sonsuz tane ölçüm bile, bir sonraki durumun ne olacağını kestiremez. Bazı çalışmalar K-flow un entropiye benzer özellik gösterdiğini belirtmektedir. Buna göre bir "*internal time*" (iç zaman) tanımı yapılmakta ve bu dinamik sistemin yaşını belirtmektedir. Kaotik dinamik sistemler için aynı zamanda kuantum mekaniğine benzer bir belirsizlik ilkesi tanımı yapılmaktadır. Buna göre sistemin termodinamik olarak tamamen belirlenmesi, sistemin dinamik tanımını anlamsız yapar, tersi sistemin dinamik olarak tamamen belirlenmesi, termodinamik bakışı anlamsız yapar (Dorfman, 1999).

4. Kompleksite

Günümüzde kompleksite olayının kesin ve üzerinde tam olarak uzlaşılmış matematiksel bir tanımı henüz yoktur. Fakat birçok farklı sistemin yapısal ve dinamik olarak kompleks davranış gösterdiği ve bu davranışın evrensel olduğu görülmüştür. Makro veya mikro kalabalık (geniş) bileşenlerden oluşmuş bir yapı (topluluk) varlığını korumak için zamanla gittikçe daha kompleks hale gelir. Bu kompleksliği üretemediği anda da yok olur. Bu durum her sistem için geçerli olmasına rağmen nasıl oluştuğu her sistem için farklı bir mekanizmaya sahiptir. Doğrusal olmayan dinamiğe sahip sistemlerin genel davranışları basit ve kaotik olabilir. Kompleks davranış bu iki davranışın aynı anda olduğu durum gibi düşünülebilir. Kompleksite bilimi disiplinler arası bir bilimdir bu nedenle yalnızca fizik yasalarından yola çıkarak tanımlanması eksik olur. Kompleks sistemlerin yapıları ve davranışları için aşağıdaki genel tanımlar yapılabilir.

- Kompleks sistemler birçok bileşene sahiptirler, bu bileşenler çeşitli alt bileşenlere sahip olabilirler, bu alt bileşenler de daha küçük bileşenlere ayrıştığında basit temel bileşenler elde edilir. Bu temel bileşenlerin farklı bireysel davranışları vardır. Sistem bileşenlerine ayrıştıkça kompleksite azalır veya yok olur, sistemin bileşenleri artıkça kompleksite artar.
- Kompleks sistemde bileşenler arasında çok sayıda ilişki vardır bu ilişkiler birbirine kuple olmuş dinamik denklemler şeklinde ifade edilirler ve sistemin evrimi bu denklemler ile ifade edilir.
- Bileşenler arasındaki ilişkiler genel olarak bir doygunluk (satürasyon) ve eşik değere sahip lineer olmayan karakterdedirler, sistemin öz evrimi bu lineer olmayan davranıştan kaynaklanır.
- Bileşenler arasındaki ilişki çevre tarafından sağlanır. Çevrenin etkisi zamanla bağlantılı dış destek şeklindedir. Sistem zamana bağlı bu dış etkiyi algılar ve kendisini bu etki altında maksimum yaşayacak şekilde adapte eder.
- Kompleks sistem tipik olarak uzun süre evrimini hatırlar ve bunun sonucu çevre ve başlangıç koşullarına göre kendisi davranışını uyarlar.
- Kompleks sistem düzenli ve rastgele bileşenlerden oluşur fakat bunlardan herhangi biri baskın değildir.
- Kompleks sistemler hiyerarşik yapıya, öz organizasyona ve ortaya çıkış (emergence) özelliklerine sahiptirler.
- Kompleks sistem geniş bir zaman ve uzunluk ölçeğinde ölçek davranışı gösterirler, bu nedenle hiç kimse veya birkaç ölçek davranışı sistemin evrimini belirleyemez (Allegrini vd., 2004).

Kompleks sistemde en alt yapısal bileşenden başlanarak sistemin bütününü kapsayacak şekilde aşağıdan yukarı doğru gidildikçe öz organizasyon, hiyerarşi ve ortaya çıkış (*emergence*) davranışları oluşur. Tersi yönde gidildiğinde bu davranışlar yok olur ve en alt bileşenler basit sistemler olarak ele alınabilir. Sistemin zaman içindeki evrimi süresince alt bileşenlerin davranışı rastgelelik içerir. Bu rastgelelik belli bir değere ulaştıktan sonra yok olur ve sistemin davranışı bir sadelik (*simplicity*) gösterir. Dinamik olan bu özellik ölçeğe bağlı olarak yapısal durum içinde geçerlidir.

5. Sonuç

Tarihsel gelişime uygun olarak toplumların bilim yapma biçimi aynı zamanda teknoloji, eğitim, sağlık ekonomi, politika gibi yapıların oluşturulmasında etkili olmuştur. Günümüzde kullanımda olan teknoloji ve diğer yapılar çoğunlukla daha önce bahsedilen klasik ve modern dönem lineer düşünce sistemi üzerine tasarlanmıştır. Bu basit, öngörülebilir, indirgemeci, küçük değişimlerin önemsiz olduğu lineer yaklaşım birçok konuda başarılı olmuştur. Fakat bu yaklaşımla oluşturulmuş sistemler zaman içinde belli tıkanıklıklara, açmazlara, çözümsüzlüklere de sahip olmuşlardır. Günümüzde teknoloji, biyoloji, çevre, sosyoloji ve ekonomi gibi konularda birçok problemle karşı karşıyayız. Bu problemler çoğunlukla bu sistemlerin kompleks yapıya ve ilişkilere sahip olmalarından kaynaklanmaktadır. Bu nedenle bu problemlerin çözümü yukarıda genel özellikleri özetlenen Kompleksite bilimine ihtiyaç olduğu açıktır. Kompleksite bilimi tanımı şimdilik iddialı bir tanımdır. Fakat sistem teorisi, *graph* (çizge) teorisi, yapay sinir ağları teorisi, ajan tabanlı modelleme gibi bilimsel yöntemler kompleksite bilimi çerçevesinde değerlendirilebilir. Kompleksite bilimi ile ilgili paradoks sayılacak bazı tartışmalardan da bahsedilebilir. Bunlardan biri algoritmik kompleksitedir. Kompleks bir problemi çözmek için yazılan bir algoritma problemin kendisinden daha kompleks olabileceğidir. Bir diğeri ise bilimsel teoriyi insanlar yapar, kompleksite bilimi ise insanında öznesi olduğu bir durumdur. Bu nedenle insanın kendisinin de bir parçası olduğu bir çerçeveyi tam olarak tanımlayıp tanımlayamayacağı sorgulanabilir. İçinde bulunduğumuz evren bir bütünsellik içindedir insan zekasının bu bütünselliği kavrama, tanımlama düzeyinde bir üst sınır olup olmadığı da kompleksite bilimi çerçevesinde tartışılan bir sorudur.

Kaynakça

Allegrini, P., Giuntoli, M., Grigolini, P., & West, B. J. (2004). From knowledge, knowability and the search for objective randomness to a new vision of complexity. *Chaos, Solitons & Fractals*, *20*(1), 11-32. https://doi.org/10.1016/S0960-0779(03)00424-7

Badii, R., & Politi, A. (1997). *Complexity*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511524691

Dorfman, J. R. (1999). *An introduction to chaos in nonequilibrium statistical mechanics*. Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511628870

Enns, R. H., & McGuire, G. C. (1997). *Nonlinear physics with Maple for scientists and engineers*. Birkhauser.

Eren, E., & Şahin, S. (Ed.). (2017). *Kompleksite ve İktisat*. Efil Yayınevi.

Faye, J. (2019). Copenhagen interpretation of quantum mechanics. E. N. Zalta (Ed.), *The Stanford Encyclopaedia of Philosophy* içinde (Winter 2019 ed.). https://plato.stanford.edu/entries/qm-copenhagen

Koschmieder, E. L. (1974). *Advances in Chemical Physics*. Wiley. https://doi.org/dqtt5k

Lorenz, E. N. (1963). Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, *20*(2), 130-141. https://doi.org/fwwt5q

Marion, J. B., & Thornton, S. T. (1995). *Classical Dynamics of Particles and Systems*. Saunders College Publishing.

Masi, M. (2005). A step beyond Tsallis and Rényi entropies. *Physics Letters A, 338*(3-5), 217-224. https://doi.org/10.1016/j.physleta.2005.01.094

Neff, R. B. & Tillman, L. (1975). Three new pocket calculators: Less costly, more powerful. *Hewlett-Packard Journal, 27*(3), 2-7. https://www.hpl.hp.com/hpjournal/pdfs/IssuePDFs/1975-11.pdf

Peterson, I. (1993). *Newton's clock: Chaos in the solar system*. Freeman.

Scott, A. C., Chu, F. Y. F., & McLaughlin, D. W. (1973). The soliton: A new concept in applied science. *Proceedings of the IEEE*, *61*(10), 1443-1483. https://doi.org/fcvksh

Thom, R. (1989). *Structural stability and morphogenesis*. Westview Press. https://doi.org/fsk2

Van der Pol, B. (1926). LXXXVIII. On “relaxation-oscillations”. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, *2*(11), 978-992. https://doi.org/10.1080/14786442608564127

Wolf, A., Swift, J. B., Swinney, H. L., & Vastano, J. A. (1985). Determining Lyapunov exponents from a time series. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, *16*(3), 285-317. https://doi.org/10.1016/0167-2789(85)90011-9